

Lista zadań 3

1. Warunki brzegowe Borna-Karmana prowadzą do kwantyzacji wektora falowego

$$\bar{k} = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{N_i} \bar{K}_i, \quad i=1,2,3$$

gdzie $m_i = 0, 1, 2, \dots, N_i - 1$ dla $\bar{k}$ znajdującego się w prymitywnej komórce elementarnej wyznaczonej przez wektory sieci odwrotnej $\bar{K}_i$.
Otrzymaj liczby kwantowe m_i dla wektorów $\bar{k} \in \Gamma$ strefy Brillouina.

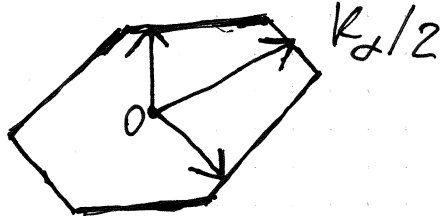
2. Pokaż, że na granicy jednowymiarowej Γ strefy Brillouina

$$\left(\frac{dE_k}{dk} \right)_{k=\pm \frac{\pi}{a}} = 0$$

3. Pokaż, że na granicy dwu- i trójwymiarowej Γ strefy Brillouina

$$\left(\frac{\partial E_k}{\partial \bar{k}} \right)_{\bar{k}=\pm \frac{\bar{K}}{2}} = 0$$

gdzie $\bar{K}$ są wektorami między „najbliższymi” sąsiadami w sieci odwrotnej lub dowolnymi wektorami sieci odwrotnej.



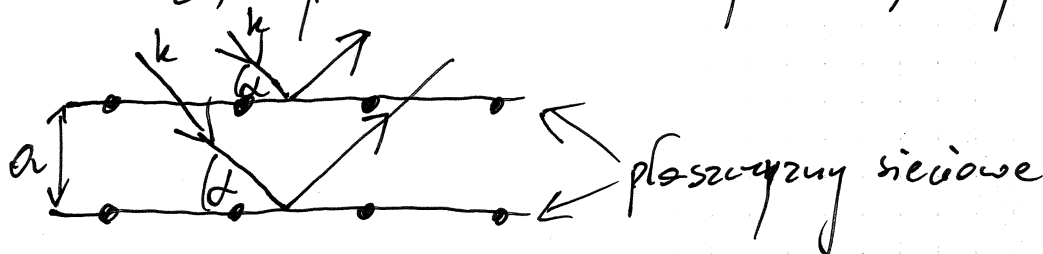
4. Rozważmy jednowymiarowy kryształ (stała sieci a) z bardzo słabym periodycznym potencjałem $V(x)$ – potencjałem jonów sieci krystalicznej. Narysuj widmo energetyczne tego układu w granicy $V(x) \rightarrow 0$, czyli przedstaw dyspersję E_k swobodnego elektronu jako funkcję okresową, $E_k = E_{k+K}$, gdzie $K = \frac{2\pi}{a}$. Jakimi związkami z rozwiązaniem funkcji Blocha w szereg Fouriera mają poszczególne pasma?

Co się stanie z widnem gdy wtłaczamy potencjał $V(x)$?

5. Na przykładzie jednowymiarowej I strefy Brillouina pokaż, że punkty $k = n \frac{\pi}{a}$ odpowiadają elektronom, których fale de Broglie'a spełniają warunki odbicia Bragga (wzmocnienia interferencyjnego) od płaszczyzn sieciowych

$$2a \sin \varphi = n \lambda$$

dla $\varphi = \frac{\pi}{2}$, czyli warunków całkowitego wewnętrznego odbicia.



6. Z definicji prymitywnej komórki elementarnej jako najmniejszego elementu, który odtwarza sieć przy translacjach o wektory bazowe sieci odwrotnej wynika, że dla każdego $\bar{k}$ z granicy prymitywnej komórki elementarnej także $\bar{k} + \bar{K}$ znajduje się na tej granicy dla pewnego wektora sieci odwrotnej $\bar{K}$. Pokaż, że jeśli dodatkowo zażądamy żeby prymitywna komórka elementarna miała symetrię punktową O_n odpowiadającą symetrii sieci (np. $O_n = C_2, C_3, C_4, C_6, C_v, C_h$) to staje się ona komórką Wignera-Seitza, czyli I strefą Brillouina. wektory $\bar{k}$ z granicy komórki spełniają równanie

$$\left(\bar{k} - \frac{\bar{K}_\alpha}{2} \right) \cdot \bar{K}_\alpha = 0$$

dla $\bar{K}_\alpha$ będących wektorami bazowymi oraz dodatkowo najkrótszymi wektorami sieci odwrotnej (w znaczeniu: ewentualnie uzupełnionymi najkrótszymi wektorami sieci odwrotnej).

7. Pokaż, że w modelu Kronga-Penneya funkcja $U_k(x)$ jest okresowa czyli $U_k(x+a) = U_k(x)$ gdy $b=0$.