

## PRAWO GAUSSA

1. Policz natężenie pola elektrycznego  $\mathbf{E}$  w odległości  $x$  od:  
a) nieskończonej płaszczyzny o gęstości powierzchniowej ładunku  $\sigma$ ,  
b) nieskończonego długiego pręta o gęstości liniowej ładunku  $\lambda$ .
2. Znaleźć natężenie pola elektrycznego  $\mathbf{E}$  pomiędzy dwiema nieskończonymi równoległymi płaszczyznami o gęstościach powierzchniowych ładunku  $\sigma$  i  $-\sigma$ . Jaka jest wartość  $\mathbf{E}$  na zewnątrz tych płaszczyzn?
3. Objętościowa gęstość ładunku nieskończonego walca o promieniu  $R$  wynosi  $\varrho$  (Rys. 1). Wyznaczyć natężenie pola elektrycznego w przestrzeni.
4. Wyznaczyć natężenie pola elektrycznego wokół dwóch płaszczyzn przecinających się pod kątem  $\phi$ , jeżeli gęstość powierzchniowa ładunku na każdej z nich wynosi  $\sigma$  (Rys. 2).
5. Przestrzenna gęstość ładunku nieskończonej warstwy o grubości  $a$  wynosi  $\varrho$ . Wyznaczyć natężenie pola elektrycznego wewnątrz i na zewnątrz warstwy.
6. Policz natężenie pola elektrycznego w odległości  $r$  od środka sfery o promieniu  $R$  naładowanej jednorodnie ładunkiem  $Q$ .
7. Policz natężenie pola elektrycznego w odległości  $r$  od środka kuli o promieniu  $R$  i stałej gęstości objętościowej ładunku  $\varrho$ .
8. Znaleźć natężenie pola elektrycznego wewnątrz naładowanej kuli, jeśli gęstość ładunku objętościowego jest proporcjonalna do odległości od środka kuli,  $\varrho = kr$ , gdzie  $k$  jest stałą.
9. Dwie jednorodnie naładowane kule o promieniu  $R$  i objętościowej gęstości ładunku  $+\varrho$  i  $-\varrho$  częściowo się nakładają tak, że odległość środków kul  $d < 2R$ . Policz natężenie pola w części wspólnej tych kul.
10. W jednym z naroży sześciangu znajduje się punktowy ładunek  $Q$ . Policz strumień pola elektrycznego przez bok zaznaczony na Rys. 3?
11. W pewnym obszarze wektor natężenia pola elektrycznego jest równy (we współrzędnych sferycznych)  $\mathbf{E} = kr\hat{\mathbf{r}}$ , gdzie  $k$  jest stałą. Znaleźć gęstość ładunku objętościowego  $\varrho$ . Wyznaczyć całkowity ładunek zawarty w kuli o promieniu  $R$  i środku w początku układu współrzędnych.
12. Funkcję uogólnioną (dystrybucję) delta Diraca w jednym wymiarze  $\delta(x)$  definiujemy następująco

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & \text{gdy } x = 0 \\ 0, & \text{gdy } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Rozważając pole elektryczne ładunku punkowego  $q$  określone wzorem

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

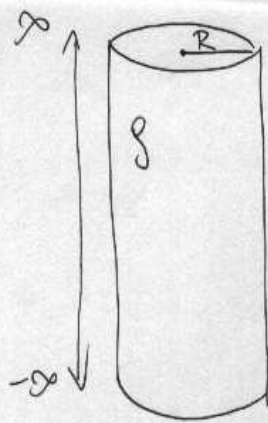
pokazać, że prawo Gaussa dla ładunku punkowego

$$\int_V (\operatorname{div} \mathbf{E}) d^3\mathbf{r} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

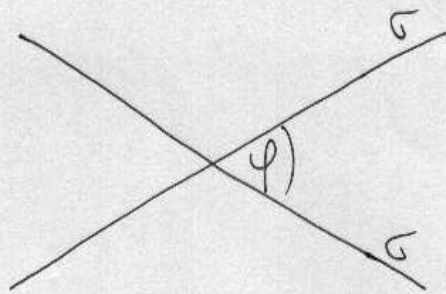
jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\operatorname{div} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = 4\pi\delta^3(\mathbf{r})$$

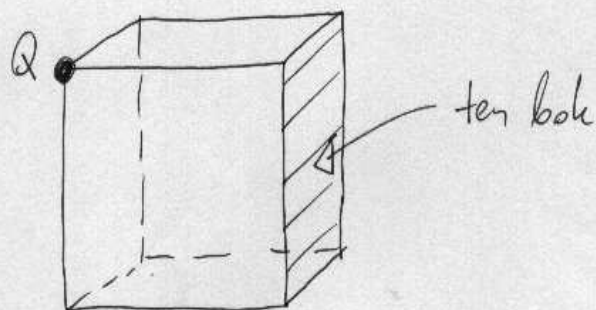
gdzie  $\delta^3(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$  jest funkcją delta Diraca w trzech wymiarach. Jak można w takim razie zapisać gęstość objętościową ładunku punkowego  $q$ ? Wskazówka: rozpocząć od pokazania, że  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  dla  $r > 0$ .



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3